دوفصلنامه مدیریت مهندسی و رایانش نرم/سال سوم، شماره2، پاییز و زمستان 1396
صفحات 20- 9 (DOI): JEMSC-1701-1049 (R1)
JEMSC.QOM
مدیریت مهندسی و رایانش نرم ۱۳۹۴

مسئله تسریع در کوتاه‌ترین مسیرهای متغیر زمانی با زمان‌های انتظار دلخواه *

غلامحسن شیردل[1]
حسن رضاپور[2]

چکیده

مسائل شبکه جریان، شاخه حیاتی در تحقیق در عملیات هستند. این مسائل به حالت¬های متغیر زمانی و ایستا طبقه¬بندی می¬گردند. مسائل شبکه جریان در کاربردهای واقعی به صورت متغیر زمانی هستند زیرا هر جریان برای عبور از یک کمان باید یک مقدار زمان داده شده را اتخاذ کند. همچنین همه پارامترها در شبکه می¬توانند به جریان وابسته باشد. در این مقاله، مسئله تسریع روی کوتاهترین مسیر متغیر زمانی مطالعه شده است. در ابتدا کوتاهترین مسیر متغیر زمانی توضیح داده می‌شود. این مسئله یافتن مسیرهایی از یک رأس مشخص شده (که مبدأ نامیده می‌شود) به سایر رئوس است به -طوری که هزینه این مسیر کمترین شده و مجموع زمان¬های عبور و زمان¬های انتظار حداکثر Tشود، که T یک عدد صحیح مثبت داده شده است. در ادامه مسئله تسریع برای یک مسئله کوتاهترین مسیر شرح داده شده است.

واژه‌های کلیدی: *مسئله تسریع، کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی*

---

* تاریخ دریافت: 1395/10/15؛ تاریخ پذیرش: 1397/01/11.

1. دانشیار گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. (نویسنده مسئول) Shirdel81math@gmail.com
2. دکترای ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران. hassan.rezapour@gmail.com

مقدمه

مسائل شبکه‌های جریان از پرکاربردترین مسائل در بهینه‌سازی هستند. شبکه‌های جریان را می توان به دو دسته ایستا و متغیر زمانی تقسیم‌بندی کرد. مباحث شبکه جریان ایستا شامل مسائل کوتاهترین مسیر، مینیمم هزینه و ماکسیمم جریان بطور گسترده‌ای بررسی شده‌اند (آهوجا و مگنانتی و اورلین، 1993). یک کلاس خاص از مسائل متغیر زمانی اولین بار توسط فورد و فولکرسن در سال 1958 معرفی شد که این کلاس خاص با نام شبکه جریان پویا در سال‌های بعد توسعه یافت (آرسن، 1989; هوپ، 1995; چابینی، 1998; گلانکر و نمهاسر، 2000; صالحی فتح‌آبادی و حسینی، 2010).

ما در این مقاله به بررسی مسئله کوتاهترین مسیر در شبکه‌های متغیر زمانی خواهیم پرداخت و مسئله تسریع را برای آن بیان خواهیم کرد. همچنین فرض می‌کنیم زمان‌های انتظار در رئوس بطور دلخواه قابل تغییر باشند. در مسئله تسریع فرض می‌کنیم بتوان با پرداخت یک هزینه اضافی، زمان عبور از یک یا چندین و یا همه کمان‌ها را کاهش دهیم. البته با این کاهش که حداکثر مقدار آن از قبل مشخص شده است باید هزینه مربوطه را پرداخت کنیم. وجود مسئله تسریع در یک مسئله کوتاهترین مسیر متغیر زمانی، این امکان را فراهم می‌کند که بتوان به جواب بهتری دست یافت یا به دلیل این که زمان داده شده برای یافتن یک مسیر متغیر زمانی کافی نیست و به عبارتی مسئله نشدنی است، با کاهش زمان‌های عبور از کمان‌ها، امکان دستیابی به یک مسیر در زمان داده شده را فراهم سازیم. هر چند که شبکه متحمل هزینه‌های اضافی در قالب هزینه‌های تسریع خواهد شد. این مسئله در عمل کاربردهای فراوانی دارد. به عنوان مثال یک مسئله حمل و نقل را در نظر بگیرید که هدف ارسال مواد غذایی از محل تولید به عنوان مبدأ به شهرهای محل مصرف به عنوان مقصد می‌باشد. اگرچه هدف یافتن کوتاهترین مسیرها برای ارسال این کالاها به نقاط مشخص شده است، ولی ارسال این کالاها باید حداکثر در زمان مشخصی رخ دهد تا به موقع به دست توزیع‌کنندگان و مشتری‌ها برسد. همچنین می‌توان مسیرهای عبوری را به عنوان کمان‌ها در نظر گرفت که واضح است عبور از آن‌ها نیاز به مدت زمان مشخصی

دارد. تا این مرحله، مسئله قابل فرمول‌بندی به یک مسئله شبکه جریان متغیر زمانی است که هدف آن یافتن کوتاهترین مسیرها از مبدأ به رئوس مشخص شده می‌باشد. اما اگر در این مسئله این امکان وجود داشته باشد یا حتی لازم باشد که برخی از مسیرها سریع‌تر طی شوند تا از فاسد شدن کالاها و مواد غذایی جلوگیری شود و در مدت زمان زودتری نسبت به پیش‌بینی قبلی به هدف برسند می‌توان شرایط جدیدی را روی مسئله اعمال کرد. البته واضح است در این قسمت باید هزینه برای ارسال سریع‌تر روی یک مسیر و یا بعبارت دیگر طی کردن یک مسیر در زمان کوتاه‌تر را پرداخت که این کار در مسائل حمل و نقل عملی است، چرا که این امکان وجود دارد در صورت ضرورت از ارسال هوایی با هزینه بیشتر استفاده کرد. با مطرح کردن این مسئله، موضوع شبکه‌های جریان متغیر زمانی مطرح خواهد شد که مسئله تسریع روی آن اعمال شده است.

پیشینه پژوهش

مسائل شبکه جریان متغیر زمانی به دلیل وجود کاربردهای عملی، بسیار مورد توجه محققان تحقیق در عملیات و بهینه‌سازی قرار گرفت به طوری که ارادا و رم در سال‌های 1990 و 1991، کای و همکارانش در سال‌های 1997 و 2001 و نصرآبادی و همکارش در سال 2010 نتایج تحقیق‌های خود را منتشر کردند.

شیردل و رضاپور در سال 2015 به بیان مسئله کوتاهترین مسیر متغیر زمانی چندهدفه پرداختند. در این پژوهش، زمان‌های انتظار در رئوس، صفر در نظر گرفته شد و یک الگوریتم جدید برای یافتن جواب کارای مسئله ارائه گردید. آن‌ها در سال 2016 مسئله کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی فازی را نیز بررسی کردند و برای یافتن جواب بهینه مسئله، یک الگوریتم پیشنهاد کردند. مسئله مسیر با ظرفیت ماکزیمم در یک شبکه متغیر زمانی فازی که زمان‌های انتظار در رئوس میانی صفر فرض شده بود در سال 2016 توسط شیردل و رضاپور مطرح شد و آن‌ها برای حل این مسئله، یک الگوریتم با روش بازگشتی ارائه داند.

روش‌شناسی پژوهش

کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی

فرض کنید $G(V, A, b, c)$ یک شبکه جهت‌دار و ساده متغیر زمانی باشد که در آن V بیانگر مجموعه رئوس و A بیانگر مجموعه کمان‌ها باشند بطوریکه $|A| = m, |V| = n$. همچنین برای هر کمان $(i, j) \in A$ زمان انتقال جریان و هزینه انتقال جریان روی این کمان به ترتیب به صورت $b(i, j, t)$ و $c(i, j, t)$ نشان داده می‌شود که در آن t لحظه خروج از رأس i می‌باشد.($b(i, j, t)$ و $c(i, j, t)$ هر دو توابعی وابسته به t هستند که t می‌تواند مقادیر $t = 0,1, \dots , T$ را اتخاذ کنند که در آن $T \geq 0$ یک عدد صحیح نامنفی داده شده است. بعبارت دیگر، $T \geq 0$ افق زمانی است که مجموع زمان‌های عبور از کمان‌ها و زمان‌های انتظار در رئوس، نباید از آن بیشتر شود. مدت زمان انتظار در رأس i را با w(i) نشان داده و هزینه انتظار در رأس i در بازه زمانی t تا $t + 1$ را با $c(i, t)$ نمایش می‌دهیم که در صورت انتظار در یک رأس برای دست یافتن به نتیجه بهتر، باید این هزینه پرداخت شود. واضح است در صورتی که شبکه دارای حلقه یا کمان‌های موازی باشد به راحتی و با اعمال تغییرات ساده مورد نیاز، می‌توان آن را به یک شبکه ساده تبدیل کرد. یک مسیر از رأس i_1 به i_k را با $P(i_1 - i_2 - \cdots - i_k)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف 1. زمان ورود به رأس i_l روی مسیر $P(i_1 - i_2 - \cdots - i_k)$ را با $\alpha(i_l)$ نمایش می‌دهیم و داریم:

$$\alpha(i_l) = \alpha(i_{l-1}) + w(i_{l-1}) + b(i_{l-1}, i_l, \tau(i_{l-1}))\ for\ 2 \leq l \leq k \qquad \text{(رابطه 1)}$$

که در آن $\tau(i_{l-1})$ زمان خروج از رأس i_{l-1} می‌باشد که از رابطه زیر محاسبه می گردد:

$$\tau(i_{l-1}) = \alpha(i_{l-1}) + w(i_{l-1}) \quad for\ 2 \leq l \leq k \qquad \text{(رابطه 2)}$$

همچنین، زمان ورود به رأس مبدأ صفر در نظر گرفته می شود.

تعریف 2. زمان عبور روی مسیر $P(i_1 - i_2 - \cdots - i_k)$ از رابطه $\alpha(i_k) = w(i_k) - \alpha(i_k)$ به دست می‌آید. یک مسیر دارای زمان حداکثر t است هرگاه

زمان آن کوچک‌تر یا مساوی با t باشد و یک مسیر دارای زمان دقیق t است هر گاه زمان آن دقیقاً برابر با t باشد.

تعریف 3. هزینه یک مسیر برابر است با مجموع هزینه‌های انتقال کمانی و هزینه‌های انتظار در رئوس روی آن مسیر. به عبارت دیگر، مسیر $P(i_1 - i_2 - \cdots - i_k)$ را در نظر بگیرید. هزینه این مسیر را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

رابطه 3)

$$\xi(P) = \xi(i_k) = \xi(i_{k-1}) + c(i_{k-1}, i_k, \tau(i_{k-1})) + \sum_{t'=0}^{w(i_k)} c\big(i_k, t' + \alpha(i_k)\big)$$

که درآن: رابطه 4)

$$\xi(i_1) = \sum_{t'=0}^{w(i_1)-1} c\big(i_1, t' + \alpha(i_1)\big)$$

واضح است که یک مسیر $P(i_1 - i_2 - \ldots - i_k)$ با زمان حداکثر (دقیقا) t یک کوتاه‌ترین مسیر از رأس i_1 به i_k با زمان حداکثر (دقیقا) t می باشد هرگاه به ازای هر مسیر دیگری مانند P¢ از رأس i_1 به i_k با زمان حداکثر (دقیقا) t داشته باشیم:

رابطه 5)

$$\xi(P) \leq \xi(P')$$

مسئله کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی، یافتن کوتاه‌ترین مسیر از یک رأس مشخص s به نام مبدأ به یک رأس مشخص دیگر می‌باشد که در آن باید هزینه این مسیر نسبت به سایر مسیرهای موجود کمترین گردد و زمان این مسیر نیز از T بیشتر نباشد. در این مقاله ما فرض می‌کنیم روی زمان‌های انتظار در رئوس، هیچ محدودیتی وجود نداشته باشد. به عبارت دیگر، روی هر رأس برای دستیابی به مسیر بهتر، هر مقدار دلخواه که بخواهیم بتوانیم توقف کنیم به این شرط که باید هزینه‌های انتظار مربوطه را پرداخت کنیم.

قضیه 1. فرض کنید $d_A(j,t)$ هزینه کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی از رأس مبدأ s به رأس j با زمان دقیق t باشد به طوری که انتظار در رئوس دلخواه است، اگر چنین مسیری موجود نباشد قرار دهید: $d_A(j,t) = \infty$ ضمناً:

الف. اگر t=0 آنگاه: برای j=s داریم: $d_A(j,t) = 0$.

همچنین برای j≠s داریم: $d_A(j,t) = \infty$.

ب. اگر j>s آنگاه :

$$d_A(j,t) = min\Big\{d_A(j,t-1) + c(j,t-1), min_{(i,j)\in A}\ \ min_{\{u|u+b(i,j,u)=t\}}\{d_A(j,u) + c(i,j,u)\}\Big\}$$

اثبات: قسمت الف قضیه با تعریف واضح است. قسمت ب قضیه را بـا اسـتقرا روی t نشان خواهیم داد. اگر t=1 و j=s حکم برقرار است. پس فرض می‌کنیم t=1 و j≠s، ضـمناً فرض می‌کنیم $b(s,j,0) = 1$. در این شرایط حکم بـه صـورت $d_A(j,t) = d_A(s,0) + c(s,j,0)$ به دست خواهد آمد زیرا $d_A(j,t-1) = \infty$. حال فرض می‌کنیم حکـم بـرای همه t' که $t' < t$ برقرار باشد. نشان می‌دهیم حکم بـرای t نیـز برقـرار اسـت. فـرض کنیـد $d_A(j,t)$ متناهی باشد (چون در غیر اینصورت چیزی برای اثبـات بـاقی نمـی‌مانـد و حکـم برقرار است) و داشته باشیم:

$$d_A(j,t) = d_A(j,t-1) + c(j,t-1)$$

در این‌صورت با فرض استقرا مسیری از مبدأ تا رأس j با زمان t-1 وجـود دارد کـه بـا یک واحد انتظار در رأس j و پرداخت هزینه $c(j,t-1)$ مسیر مطلوب حاصـل مـی‌گـردد. اگر $d_A(j,t)$ از قسمت ب قضیه حاصل شود یعنی داشته باشیم:

$$d_A(j,t) = d_A(j,u) + c(i,j,u) \text{ که } u + b(i,j,u) = t$$

چون $b(i,j,u) > 0$ پس $u < t$ لذا با فرض استقرا مسیری از مبدأ به رأس i با زمان u و با هزینـه $d_A(j,u)$ وجـود دارد کـه رأس i رأس ماقبـل رأس j اسـت کـه بـا پرداخـت $c(i,j,u)$ مسیری از مبدأ به رأس j با هزینه $d_A(j,t)$ حاصل می‌گردد. زمان این مسـیر نیـز برابر t است زیرا $u + b(i,j,u) = t$. در هر دو حالت در قسمت ب نشـان دادیـم مسـیری از مبدأ به رأس j و با زمان t و با هزینه $d_A(j,t)$ وجود دارد. ضمناً به‌راحتـی و بـا اسـتفاده از برهان خلف می‌توان نشان داد که این مسیر کوتاهترین مسیر موجـود از مبـدأ بـه رأس ذکـر شده می‌باشد.

قضیه 2. فرض کنید $d^*{}_A(j)$ هزینه کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی از رأس مبدأ s به رأس j با زمان حداکثر T با زمان‌های انتظار دلخواه در رئوس باشد آنگاه: $d^*{}_A(j) = min_{0 \le t \le T} d_A(j,t)$.

اثبات: اثبات با استفاده از تعریف $d^*{}_A(j)$ و قضیه1 واضح است.

یافته‌های پژوهش

مسئله تسریع روی کوتاهترین مسیرهای متغیر زمانی با زمانهای انتظار دلخواه

فرض کنید بخواهیم زمان عبور از کمان (i,j) را کاهش دهیم تا بتوانیم سریع‌تر از کمان مذکور عبور کنیم و در نتیجه زمان کمتری برای یک مسیر بدست آوریم. این بحث را تسریع می‌نامیم. برای این کار برای هر کمان یک مقدار $\gamma(i,j,t)$ که حداکثر میزان کاهش را روی کمان (i,j) در لحظه خروج t از رأس i نشان می‌دهد، توسط مسئله به ما داده می‌شود. هزینه مرتبط با آن را با $c_\gamma(i,j,t)$ نشان می‌دهیم. اگر امکان ایجاد تسریع روی یک مسئله کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی وجود داشته باشد شاید به نتیجه بهتری دست یابیم و هزینه کوتاه‌تری برای رسیدن به یک رأس مشخص از مبدأ حاصل شود، زیرا متغیرهای جدید اضافه شده خود از نوع متغیرهای تصمیم هستند. ضمناً باید به این نکته ظریف هم دقت کرد که مدت زمان تسریع از مدت زمان انتقال روی یک کمان باید کمتر باشد. به عبارت دیگر، برای هر کمان $(i,j) \in A$ در صورت وجود تسریع داریم: $b(i,j,t) - \gamma(i,j,t) > 0$.

برای یافتن کوتاهترین مسیر متغیر زمانی با زمان‌های انتظار دلخواه روی رئوس و وجود مسئله تسریع، قضایای زیر ایده اصلی حل این مسائل هستند:

قضیه 3. فرض کنید $d^s{}_A(j,t)$ هزینه کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی از رأس مبدأ s به رأس j با زمان دقیق t باشد به طوری که انتظار در رئوس دلخواه است و مسئله تسریع روی آن مطرح شده که در آن، در صورت وجود تسریع برای کمان $(i,j) \in A$ مدت زمان

تسریع و هزینه آن به ترتیب با $\gamma(i,j,t)$ و $c_\gamma(i,j,t)$ مشخص شده‌اند، اگر چنین مسیری موجود نباشد قرار دهید: $d^s{}_A(j,t) = \infty$، ضمناً:

الف. اگر t=0 برای j=0 داریم: $d^s{}_A(j,t) = 0$ و برای j≠s داریم: $d^s{}_A(j,t) = \infty$.

ب. اگر t>0 آنگاه:

$$d^s{}_A(j,t) = min\Big\{d^s{}_A(j,t-1) + c(j,t-1), min_{(i,j)\in A}\ min_{\{u|u+b(i,j,u)=t\}}\left\{d^s{}_A(j,u) + c(i,j,u) + c_\gamma(i,j,u)\right\}\Big\}$$

اثبات: کافی است در اثبات قضیه 1، عبارت $b(i,j,t) - \gamma(i,j,u)$ را با $b(i,j,t)$ و عبارت $c(i,j,t) - c_\gamma(i,j,u)$ را با $c(i,j,t)$ جایگزین کنید تا این قضیه اثبات گردد.

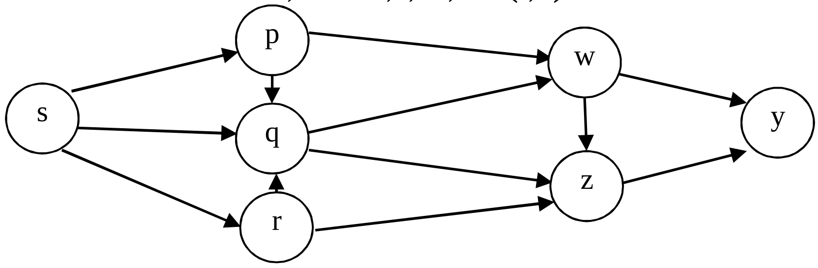
قضیه 4. فرض کنید $d^{s*}{}_A(j)$ هزینه کوتاه‌ترین مسیر متغیر زمانی از رأس مبدأ s به رأس j با زمان حداکثر T و با زمان‌های انتظار دلخواه در رئوس باشد به طوری که مسئله تسریع نیز مطرح شده است، در اینصورت داریم: $d^{s*}{}_A(j) = min_{0\le t\le T} d^s{}_A(j,t)$.

اثبات: اثبات با استفاده از تعریف $d_A^{s*}(j)$ و قضیه 3 واضح است.

مثال های عددی

مثال 1. شبکه جریان متغیر زمانی داده شده در شکل 1 را در نظر بگیرید. فرض کنید T=7 و داده‌های مورد نیاز، شامل زمان‌های انتقال و هزینه‌های انتقال در جدول 1 داده شده باشند. همچنین فرض کنید انتظار در رئوس دلخواه باشد و هزینه‌ای را بر شبکه تحمیل نکند، به عبارت دیگر:

$$\forall i \in V, \forall t = 1,2,\dots,7:\ c(i,t) = 0$$



شکل 1. **شبکه جریان متغیر زمانی**

فرض کنید برای دو کمان (p,w) و (z,y) و برای هر t متعلق به افق زمانی داشته باشیم:

$$(b(z,y,t), c(z,y,t))=(2,3) \quad , \quad (b(p,w,t), c(p,w,t))=(1,2)$$

و همچنین سایر اطلاعات مورد نیاز در جدول 1 داده شده باشند.

جدول 1. زمان‌های انتقال و هزینه‌های انتقال برای شبکه شکل1

کمان	(s,p)		(s,q)		(s,r)		(p,q)		(q,w)	
b, c / t	b	c	b	c	b	c	b	c	b	c
t = 0	1	3	1	3	2	4	1	1	2	2
t = 1	2	1	1	2	1	1	1	2	1	3
t = 2	1	4	3	3	1	3	1	3	2	2
t = 3	1	5	2	1	2	2	1	4	1	3
t = 4	2	1	1	2	1	1	2	1	2	1
t = 5	1	2	3	4	1	3	2	2	1	3
t = 6	2	1	1	1	1	1	2	3	3	1
t = 7	1	1	2	2	1	2	2	3	1	4
t = 0	3	2	2	1	1	3	4	4	3	3
t = 1	1	2	1	1	1	2	3	6	3	2
t = 2	1	2	2	2	1	1	5	8	4	1
t = 3	1	3	1	2	2	2	4	4	5	3
t = 4	2	3	1	3	2	3	3	6	6	4
t = 5	1	3	3	3	1	1	3	2	4	1
t = 6	2	1	1	1	1	2	4	3	3	3
t = 7	1	4	1	5	2	4	6	5	4	5

با به کار بردن قضایای 1 و 2 برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از رأس مبدأ s به سایر رئوس، نتایج به دست آمده در جدول 2 ارائه شده است:

دوفصلنامه مدیریت مهندسی و رایانش نرم
سال سوم، شماره2، پاییز و زمستان 1396

جدول2. محاسبه کوتاهترین مسیرهای متغیر زمانی مثال1

$d_A(j)$	$j=s$	$j=p$	$j=q$	$j=r$	$j=w$	$j=z$	$j=y$
t=0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
t=1	0	3	3	∞	∞	∞	∞
t=2	0	3	2	1	5	4	∞
t=3	0	1	2	1	4	2	∞
t=4	0	1	2	1	4	2	∞
t=5	0	1	1	1	2	2	6
t=6	0	1	1	1	2	2	4
t=7	0	1	1	1	2	2	4
$\boldsymbol{d^*{}_A(j)}$	0	1	1	1	2	2	4

مثال 2. شبکه جریان داده شده در مثال1 را در نظر بگیرید. فرض کنید افق زمانی همان T=7 باشد و سایر اطلاعات این مثال نیز مانند زمان‌های انتقال و هزینه‌های انتقال روی کمان‌ها، همان اطلاعات داده شده در مثال 1 و جدول 1 باشد. در این مثال می‌خواهیم مسئله تسریع را اعمال کنیم. فرض کنید سه کمان (w, z)، (w, y) و (z, y) را برای اعمال مسئله تسریع در نظر بگیریم و داشته باشیم:

$\forall t: c_\gamma(w,z,t) = 3$ و $\gamma(w,z,t) = 1$

$\forall t: c_\gamma(w,y,t) = 2$ و $\gamma(w,y,t) = 2$

$\forall t: c_\gamma(z,y,t) = 2$ و $\gamma(z,y,t) = 1$

با به کار بردن قضایای 3 و 4 برای یافتن کوتاه‌ترین مسیر از رأس مبدأ s به سایر رئوس با اعمال تسریع روی سه کمان مذکور نتایج به صورت زیر در جدول 3 آمده است:

جدول 3. محاسبه کوتاهترین مسیرهای متغیر زمانی با اعمال مسئله تسریع برای مثال 2

$d^s{}_A(j)$	$j=s$	$j=p$	$j=q$	$j=r$	$j=w$	$j=z$	$j=y$
t = 0	0	∞	∞	∞	∞	∞	∞
t= 1	0	3	3	∞	∞	∞	∞
t= 2	0	3	2	1	5	4	∞

$d^{s}{}_{A}(j)$	$j=s$	$j=p$	$j=q$	$j=r$	$j=w$	$j=z$	$j=y$
t= 3	0	1	2	1	4	2	∞
t= 4	0	1	2	1	4	2	∞
t= 5	0	1	1	1	2	2	6
t= 6	0	1	1	1	2	2	4
t= 7	0	1	1	1	2	2	3
$\boldsymbol{d^{s*}{}_{A}(j)}$	0	1	1	1	2	2	3

نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با بررسی مثال‌های 1 و 2 که اختلاف آن‌ها در نتایج ستون پایانی است می‌توان به نتایج مهمی دست یافت. برای این که این مقایسه واضح شود سطرهای پایانی جداول 2 و 3 را در جدول 4 مشاهده نمایید.در مثال اول که یک مسئله متغیر زمانی بود هزینه رسیدن به رأس پایانی برابر 4 می‌باشد.

جدول 4. مقایسه مثال‌های 1 و 2 و تأثیر اعمال مسئله تسریع

$d^{*}{}_{A}(j)$	0	1	1	1	2	2	4
$d^{s*}{}_{A}(j)$	0	1	1	1	2	2	3

ضمناً در مثال1 در زمان‌های 0و1و...و4 امکان رسیدن به رأس پایانی وجود ندارد، اما با اعمال مسئله تسریع روی همین شبکه جریان که مثال 2 را به وجود آورد به این نتیجه دست می‌یابیم که هزینه رسیدن به رأس پایانی یک واحد نسبت به مثال قبل کاهش یافته و به عدد 3 رسید. همچنین، امکان رسیدن به رأس پایانی در زمان‌های 3 و 4 با پرداخت هزینه به ترتیب 6 و 4 میسر شد.

این بررسی اهمیت وجود و اعمال یک مسئله تسریع را روی شبکه‌های جریان متغیر زمانی واضح می‌کند. مسئله تسریع باعث کوتاه‌تر شدن زمان عبور در شبکه می‌گردد. ضمناً این موقعیت را فراهم می‌کند که شاید رسیدن به یک رأس با هزینه کمتر و زمان کمتری امکان‌پذیر گردد و همچنین باعث می‌شود افق زمانی بهتری حاصل شود. به عبارت دیگر، موعد مقرر را با پرداخت هزینه تسریع مربوطه، به تعویق انداخت.

منابع

- Ahuja, R. K. & Magnanti, T. L. & Orlin, J. B. (1993). Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications. DC: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Ford, L. R. & Fulkerson, D. R. (1958). Constructing maximal dynamic flows from static flows, Operations Research, **6**, 419–433.
- Aronson, J. (1989). A survey of dynamic network flows. Annals of Operations Research, **20**, 1–66.
- Hoppe, B. (1995). Efficient Dynamic Network Flow Algorithms. Ph.D. Thesis, Cornell University.
- Chabini, L. (1998). Discrete dynamic shortest path problems in transportation applications: Complexity and algorithms with optimal run time. Transportation Research Record, 1645, 170–175.
- Glockner, G. & Nemhauser, G. (2000). A dynamic network flow problem with uncertain arc capacities: formulation and problem structure, Operations Research, 48 (2): 33–242.
- Salehi Fathabadi, H. & Hosseini, S.A. (2010). Maximum flow problem on dynamic generateve network flows with time-varying bounds. Applied Mathematical Modeling, 34, 2136–2147.
- Orda, A. & Rom, R. (1990). Shortest-path and minimum-delay algorithms in networks with time-dependent edge length. Journal of the Association for Computing, 37, 607–625.
- Orda, A. & Rom, R. (1991). Minimum weight paths in time-dependent networks. Networks, 21, 295–320.
- Cai, X. & Kloks, T. & Wong, C.k. (1997). Time-varying shortest path problems with constraints. Networks, 29, 141–149.
- Cai, X. & Sha, D. & Wong, C. K. (2001). Time-varying minimum cost flow problems. European Journal of Operational Research, 131, 352–374.
- Nasrabadi, E. & Hashemi, M. (2010). Minimum cost time-varying network flow problems. Optimization Methods & Software, 25 (3): 429–447.
- Shirdel, Gh. & Rezapour, H. (2015). K-Objective Time-Varying Shortest Path Problem with Zero Waiting Times at Vertices. Trends in Applied Sciences Research, 10 (5): 278-285.
- Shirdel, Gh. & Rezapour, H. (2016). the Arbitrary Waiting Times in the Time-Varying Shortest Path with Triangular Fuzzy Costs. Advances and Applications in Mathematical Sciences, 15, (2): 75-85.
- Shirdel, Gh. & Rezapour, H. (2016). Time-varying maximum capacity path problem with zero waiting times and fuzzy capacities, SpringerPlus 5, 981-990.

استناد به این مقاله: شناسه دیجیتال (DOI): JEMSC-1701-1049 (R1)

شیردل، غ.ح؛ رضاپور، ح. (1396). «مسئله تسریع در کوتاه‌ترین مسیرهای متغیر زمانی با زمان‌های انتظار دلخواه»، *دوفصلنامه مدیریت مهندسی و رایانش نرم*، 3 (5)، 20-9.