



## Minimum Variance Beamforming Based on Covariance Matrix Reconstruction Using Orthogonal Vectors

Saman Rezaeizadeh<sup>1</sup> and Mehdi Bekrani<sup>2</sup>

1. MSc. in Telecommunications, Faculty of Electrical and Computer Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran. Email: [rezaeizadeh.s@qut.ac.ir](mailto:rezaeizadeh.s@qut.ac.ir)
2. Corresponding author, Assistant Prof., Faculty of Electrical and Computer Engineering, Qom University of Technology, Qom, Iran. Email: [bekrani@qut.ac.ir](mailto:bekrani@qut.ac.ir)

| Article Info   | ABSTRACT  |
|--|---|
| <p><b>Article type:</b><br/>Research Article</p> <p><b>Article history:</b><br/>Received 2023 June 28<br/>Received in revised form 2023 August 3<br/>Accepted 2023 August 5<br/>Published online 2023 September 16</p> <p><b>Keywords:</b><br/>beamforming,<br/>covariance matrix reconstruction,<br/>interference,<br/>minimum variance.</p>                | <p>Beamforming methods based on minimum variance have poor performance in case there is an error in estimating the covariance matrix of noise and interference. One of the error factors in estimating the covariance matrix is the presence of desirable signal components in estimated noise and interference vectors, which reduces the output SINR level of the beamformer. In this paper, in order to make the beamformer algorithm robust to the incorrect estimation of noise and interference covariance matrix, a covariance matrix reconstruction method using the orthogonal steer vectors obtained from the Gram Schmidt algorithm along with a diagonal loading is applied. Simulation results show the superiority of the proposed method in the improvement of beam pattern, angle estimation of interferences, and output SINR level, compared to the counterparts.</p> |
| <p><b>Cite this article:</b> Rezaeizadeh, S., &amp; Bekrani, M. (2023). Minimum Variance Beamforming Based on Covariance Matrix Reconstruction Using Orthogonal Vectors. <i>Engineering Management and Soft Computing</i>, 9 (1). 90-107. DOI: <a href="https://doi.org/10.22091/JEMSC.2022.7155.1156">https://doi.org/10.22091/JEMSC.2022.7155.1156</a></p> |   |
|  | <p>© The Author(s)<br/>DOI: <a href="https://doi.org/10.22091/JEMSC.2022.7155.1156">https://doi.org/10.22091/JEMSC.2022.7155.1156</a></p> <p>Publisher: University of Qom</p>   |

## شکل‌دهی پرتو کمینه واریانس مبتنی بر بازسازی ماتریس کواریانس با بردارهای متعامد

سامان رضایی زاده<sup>۱</sup> و مهدی بکرانی<sup>۲</sup>

۱. کارشناسی ارشد، گروه مخابرات و الکترونیک، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران. رایانامه: [rezaeizadeh.s@qut.ac.ir](mailto:rezaeizadeh.s@qut.ac.ir)

۲. نویسنده مسئول، استادیار گروه مخابرات و الکترونیک، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه صنعتی قم، قم، ایران. رایانامه: [bekrani@qut.ac.ir](mailto:bekrani@qut.ac.ir)

| اطلاعات مقاله   | چکیده   |
|---|---|
| <p>نوع مقاله: مقاله پژوهشی</p> <p>تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۴/۰۷</p> <p>تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۵/۱۱</p> <p>تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۱۳</p> <p>تاریخ انتشار: ۱۴۰۲/۰۶/۲۵</p> <p>کلیدواژه‌ها:<br/>شکل‌دهی پرتو،<br/>کمینه واریانس،<br/>بازسازی ماتریس کواریانس،<br/>تداخل.</p> | <p>روش‌های شکل‌دهی پرتو مبتنی بر کمینه واریانس، درحالتیکه خطا در تخمین ماتریس کواریانس نویز و تداخل وجود داشته باشد، عملکرد ضعیفی دارند. از جمله عوامل خطا در تخمین ماتریس کواریانس، وجود مولفه‌های سیگنال مطلوب در بردارهای تخمینی نویز و تداخل است که سبب کاهش سطح سیگنال به نویز و تداخل در خروجی شکل‌دهنده پرتو می‌شود. در این مقاله برای مقاوم‌سازی الگوریتم شکل‌دهی در مقابل خطای تخمین ماتریس کواریانس نویز و تداخل، از بازسازی ماتریس کواریانس با استفاده از بردارهای متعامد حاصل از الگوریتم گرام اشمیت همراه با بارگذاری قطری بهره‌گیری می‌شود. نتایج شبیه‌سازی نشان‌دهنده برتری روش پیشنهادی در بهبود الگوی پرتو، تخمین زوایای تداخل و همچنین بالا بردن سطح توان سیگنال به نویز و تداخل در مقایسه با الگوریتم‌های هم‌تا است.</p> |

استناد: رضایی زاده، سامان و بکرانی، مهدی. (۱۴۰۲). «شکل‌دهی پرتو کمینه واریانس مبتنی بر بازسازی ماتریس کواریانس با بردارهای متعامد». مدیریت

مهندسی و رایانش نرم، دوره ۹ (۱). صص: ۹۰-۱۰۷. <https://doi.org/10.22091/JEMSC.2022.7155.1156>



## ۱) مقدمه

شکل دهنده پرتو یک نوع فیلترینگ فضایی<sup>۱</sup> است که به منظور دریافت یا ارسال یک سیگنال در یک جهت خاص که مانع از ارسال یا دریافت سیگنال از جهات دیگر می شود توسط آرایه دارای چند عنصر ایجاد می شود. روش های شکل دهی پرتو در زمینه های گوناگون همچون مخابرات بی سیم، رادار، سونار، مهندسی پزشکی، اخترشناسی رادیویی و غیره بکار گرفته می شوند [۱]، [۲]. شکل دهنده های پرتو بطور کلی به دو دسته شکل دهنده های کلاسیک و وفقی تقسیم بندی می شوند. شکل دهنده های کلاسیک دقت بالایی در هدایت گلبرگ اصلی به سمت زاویه ورود مطلوب دارند. از طرفی این روش ها قابلیت هدایت گلبرگ های فرعی را ندارند و نمی توانند در زوایای نامطلوب، یعنی زوایای ورود سیگنال های تداخلی صفر ایجاد کنند تا امکان حذف سیگنال های مخرب از زوایای تداخل فراهم شود. به این نوع شکل دهنده ها تاخیر و جمع<sup>۲</sup> گفته می شود [۱]، [۳]. در این نوع از شکل دهنده خطا در محل قرارگیری عناصر آرایه به شدت می تواند مخرب باشد چرا که الگوی پرتو، حاصل از جمع تاخیر در رسیدن سیگنال به هر عنصر است.

شکل دهنده های وفقی برخلاف روش های کلاسیک توانایی هدایت هر دو گلبرگ اصلی و فرعی را دارند. از سوی دیگر قابلیت تطبیق الگوریتم با تغییر زاویه ورود سیگنال و یا در مواردی که سیستم تغییر می کند را دارند و می توانند خروجی را به شکل ایده آل نزدیک کند. روش های پیاده سازی این نوع از شکل دهنده ها نیز از گستردگی بالایی برخوردار است. در این روش ها به اطلاعات محاسباتی کمتری نسبت به روش های کلاسیک نیاز است. تفاوت این دو روش در وزن دهی به هر عنصر برای هدایت گلبرگ ها و رسیدن به کمترین خطای خروجی است.

رویکردهای گوناگونی برای شکل دهنده وفقی پرتو وجود دارد که از جمله می توان به شکل دهنده های مبتنی بر الگوریتم کمینه واریانس بدون اعوجاج (MVDR)<sup>۳</sup> [۴]، [۵]، الگوریتم کمینه واریانس با قید خطی (LCMV)<sup>۴</sup> [۶]، الگوریتم معکوس ماتریس نمونه SMI<sup>۵</sup> [۷]، [۸]، [۹]، الگوریتم صفر گذار (NS)<sup>۶</sup> [۱۰]، الگوریتم بدترین حالت (WC)<sup>۷</sup> [۱۱]، [۱۲]، و الگوریتم های وفقی نوع LMS<sup>۸</sup> و RLS<sup>۹</sup> [۱۳]، [۱۴]، [۱۵] نام برد.

شکل دهی پرتو با روش متعارف MVDR با کمینه سازی واریانس خروجی در عین حفظ پاسخ سیگنال مطلوب ثابت (بدون اعوجاج) صورت می گیرد [۴]. پیاده سازی شکل دهنده MVDR نیاز به دانش ماتریس کواریانس داده دارد که در کاربردهای عملی ناموجود است. بنابراین نسخه تجربی MVDR با استفاده از تخمینی از ماتریس کواریانس پیاده سازی می شود که حساس به نویز است [۵]. بر این اساس چندین نسخه مقاوم به نویز برای شکل دهنده MVDR تجربی پیشنهاد شده است [۵].

1. Spatial filtering

2. Delay and sum

3. Minimum variance distortionless response

4. Linear constraint minimum variance

5. Sample matrix inversion

6. Null steering

7. Worst case

8. Least mean square

9. Recursive least squares

الگوریتم LCMV در هدایت پرتو گلبرگ اصلی مانند الگوریتم MVDR عمل می‌کند، اما علاوه بر آن با اضافه کردن شروط خطی باعث حذف تداخل در زوایای معین و در نتیجه کاهش بیش از پیش اعوجاج سیگنال نسبت به روش MVDR می‌شود [۶].

در صورت عدم وجود اطلاعات مربوط به ماتریس کواریانس داده‌های نویز و تداخل، می‌توان از نمونه‌های داده‌های نویز و تداخل برای تخمین ماتریس استفاده کرد. مزیت این روش که اصطلاحاً الگوریتم شکل‌دهنده پرتو SMI نامیده می‌شود، سادگی محاسباتی آن و عدم نیاز به فیلتر کردن سیگنال‌های ورودی است [۸]. در صورتیکه سیگنال‌های تداخلی ثابت نیستند، یا وقتی آرایه در حال حرکت است، عملکرد این روش افت می‌کند. در این حالت می‌توان از الگوریتم SMI مقاوم استفاده کرد [۷]، [۸]. در الگوریتم SMI مقاوم، یک فاکتور جدید به ماتریس کواریانس نمونه اضافه می‌شود و بازسازی ماتریس صورت می‌گیرد.

الگوریتم NS از روش‌های با دقت بالاست که در آن از ماتریس داده ورودی به همراه ایجاد محدودیت کامل در زوایای تداخلی بهره گرفته می‌شود. از مزیت‌های این روش توانایی بالا در حذف تداخل است و از معایب آن حساسیت بالا به کوچک‌ترین مقدار خطای ورودی در تخمین زوایای ورودی، می‌باشد.

در الگوریتم WC، تحلیل بر پایه تخمین بردار جاروب زاویه مطلوب می‌باشد. در این الگوریتم مقدار خطای معینی برای بردار جاروب زاویه مفروض در نظر گرفته می‌شود و هدف مقاوم کردن شکل‌دهنده پرتو در برابر این خطا می‌باشد. الگوریتم‌های وقتی LMS و RLS به‌طور گسترده‌ای در شکل‌دهی وقتی مورد استفاده قرار می‌گیرند [۱۴]، [۱۵]. عملکرد شکل‌دهنده با الگوریتم وقتی در شرایطی که نسبت SNR<sup>۱۰</sup> متغیر است، افت می‌کند و همچنین تنظیم پارامترهای الگوریتم وقتی در عمل آسان نیست [۱۳]، [۱۵]. بر این اساس در [۱۵] از طول گام متغیر مبتنی بر تابع سیگموئید نرمالیزه برای کنترل رفتار همگرایی الگوریتم LMS پیشنهاد شده است. سرعت همگرایی و عمق صفرگذاری در الگوریتم RLS بهتر از LMS است که به هزینه افزایش قابل توجه حجم محاسبات حاصل می‌شود [۱۴].

از میان روش‌های وقتی شکل‌دهی پرتو، الگوریتم‌های شکل‌دهی مبتنی بر کمینه واریانس جزء رایج‌ترین و موثرترین روش‌ها می‌باشند [۳]، [۱۶]. در این الگوریتم‌ها از تخمین ماتریس کواریانس داده‌های نویز و تداخل، جهت وزن‌دهی به عناصر آرایه استفاده می‌شود [۸].

با وجود توانایی شکل‌دهنده‌های وقتی پرتو از جمله روش مبتنی بر کمینه واریانس در ایجاد الگوی پرتو مطلوب، چالش‌هایی سبب افت عملکرد این شکل‌دهنده‌ها می‌شود که در ادامه اشاره می‌شود. از جمله این چالش‌ها تغییرات بهره عناصر آرایه، عدم دقت در فاز و عدم دقت در شکل آرایه و تخمین نادرست زاویه ورود است که سبب خطا در بردارهای جاروب زاویه وارد شده و با به وجود آمدن این مشکل بردار وزن‌ها نیز به گونه‌ای تنظیم می‌شوند که گلبرگ‌ها به سمت زوایای نادرست هدایت شوند و این امر در پردازش سیگنال، خطا حاصل می‌کند [۱۷]، [۱۸]. همچنین خطا در تخمین ماتریس کواریانس داده در شکل‌دهنده‌های وقتی که از این ماتریس در محاسبات استفاده می‌کنند سبب ایجاد خطاهای قابل توجه در تخمین وزن‌ها می‌شود که به نوبه خود سبب کاهش قابلیت حذف تداخل و افت بهره آرایه می‌باشد [۱۹].

<sup>10</sup>. Signal to noise ratio

از مهمترین عوامل بروز خطا در تخمین ماتریس کواریانس داده، در روش‌های مبتنی بر کمینه واریانس، حضور مولفه سیگنال دریافتی از زاویه ورود مطلوب، یعنی سیگنال مطلوب، در ماتریس کواریانس تخمینی داده‌های نویز و تداخل است که سبب خطا در تخمین ماتریس کواریانس می‌شود [۱۷]، [۲۰]. حضور مولفه سیگنال مطلوب در ماتریس کواریانس نویز و تداخل سبب می‌شود الگوی پرتو تغییر کند و گلبه‌ها در زوایای مطلوب و تداخلی جابه‌جا شوند [۲۱]. این امر به نوبه خود حذف یا تضعیف سیگنال در زاویه ورود مطلوب را به دنبال دارد [۲۲] که اصطلاحاً مشکل خودصفرگذاری<sup>۱۱</sup> نامیده می‌شود. همچنین الگوی پرتو در زوایای تداخلی تغییر یافته و مانع از حذف موثر تداخل‌ها می‌شود [۲۳]. برای رفع و یا کاهش چالش‌های فوق از روش‌های مقاوم<sup>۱۲</sup> شکل‌دهی پرتو استفاده می‌شود. روش‌های شکل‌دهی مقاوم مبتنی بر تخمین ماتریس کواریانس بطور کلی به دو دسته تقسیم می‌شوند که عبارتند از بارگذاری قطری [۲۴] و بازسازی ماتریس کواریانس [۲۵] و در ادامه مورد بحث قرار می‌گیرند.

## ۲) پیشینه پژوهش

تاکنون راهکارهای متعددی برای کاهش خطا در تخمین ماتریس کواریانس در کاربرد شکل‌دهی پرتو ارائه شده است. از جمله روش‌های شکل‌دهی پرتو برای کاهش مسئله فوق، شکل‌دهنده پرتو فضای ویژه (ESB)<sup>۱۳</sup> است که سبب جداسازی نسبی سیگنال مطلوب از سیگنال‌های نویز و تداخل و در نتیجه بازسازی ماتریس کواریانس نویز و تداخل می‌شود [۲۶]. در این روش، زیرفضای سیگنال پس از تخمین بر روی بردار جاروب فرضی تصویر می‌شود و زیرفضای نویز و تداخل از زیرفضای سیگنال مطلوب جدا می‌شود. این روش پیچیدگی محاسباتی کمی داشته و به خطاهای کوچک حساس نیست، اما هنگامی که زیرفضای سیگنال به دلیل نویز و یا خطا در بردار جاروب فرضی، دچار اغتشاش شده باشد، کارایی آن پایین می‌آید. همچنین در نسبت‌های سیگنال به نویز (SNR) پایین، به دلیل پایین بودن توان سیگنال نسبت به توان تداخل، کارایی مطلوبی نخواهد داشت [۲۳]، [۲۶].

روش شکل‌دهی پرتو مبتنی بر تصویرسازی متعامد (OP)<sup>۱۴</sup> روش مقاوم دیگری است که بهره قابل توجهی نسبت به الگوریتم شکل‌دهنده پرتو ESB در شرایط تعداد نمونه‌های داده محدود، خطاهای کوچک موجود در زیرفضای سیگنال، و سطح پایین SNR سیگنال مطلوب فراهم می‌کند. با این وجود، در بخش جداسازی زیرفضای سیگنال و تشکیل زیرفضای متعامد، در توان‌های نویز بالا دچار مشکل است [۲۰]، [۲۲].

روش بارگذاری قطری (DL)<sup>۱۵</sup> روش دیگری مبتنی بر معیار کمینه واریانس است که با افزودن مقادیر معینی به درایه‌های قطری ماتریس کواریانس، تاثیر خطای ناشی از تعداد پایین برداشت‌های<sup>۱۶</sup> نمونه‌های داده در تخمین ماتریس کواریانس کاهش می‌یابد [۲۷]. همچنین این روش به بالارفتن سرعت الگوریتم در محاسبات کمک می‌کند و مسئله بهینه‌سازی با دقت بالاتری حل می‌شود [۲۸]، [۲۹]. از جمله رویکردهایی که برای پیدا کردن مقدار بارگذاری پیش گرفته

11. Self-nulling

12. Robust

13. Eigen-space beamformer

14. Orthogonal projection

15. Diagonal loading

16. Snapshots

می‌شود، فیلتر تطبیقی مکانی (SMF)<sup>۱۷</sup> است. روش DL مقدار توانی را که شکل دهنده پرتو در زاویه مطلوب به‌عنوان بیشینه توان دریافت می‌کند، حفظ کرده و در سطح پرتو شکل دهنده تاثیر نمی‌گذارد. در مواقعی که ماتریس کواریانس تخمینی به دلیل ورود خطا از حالت بهینه خارج شود، با افزودن مقدار حاصل از محاسبه بارگذاری، تخمین ماتریس کواریانس بهبود می‌یابد [۸]، [۳۰].

به‌منظور بازسازی ماتریس کواریانس نویز و تداخل، علاوه بر روش‌های فوق، اخیراً روش‌های مقاوم دیگری نیز جهت مقابله با چالش‌های موجود پیشنهاد شده‌است که تلاش می‌کنند الگوی پرتو را به شکل ایده‌آل خود نزدیک کنند [۲۴]، [۲۶]. در این روش‌ها ابتدا توان سیگنال‌های تداخل و نویز با روش کاپون<sup>۱۸</sup> تخمین زده می‌شود، سپس با حل مسئله بهینه‌سازی محدب<sup>۱۹</sup> و تخمین توان سیگنال مطلوب و یافتن تعامد بین سیگنال‌های ورود مختلف، چالش تنظیم گلبرگ اصلی<sup>۲۰</sup> و گلبرگ‌های فرعی<sup>۲۱</sup> را حل می‌کنند. با این وجود، کارایی این روش‌ها در توان‌های بالای تداخل افت می‌کند. در این مقاله راهکاری برای حذف سیگنال مطلوب از داده‌های ورودی و حل مشکل خودصفرگذاری پیشنهاد می‌شود که حساسیت پایینی به سطح نویز و تداخل دارد. این راهکار مبتنی است بر یافتن بردار جاروب عمود بر بردار جاروب سیگنال مطلوب ورودی، که توسط الگوریتم گرام اشمیت به دست می‌آید. با ضرب بردار متعامد حاصله در سیگنال‌های دریافتی، ماتریس کواریانس نویز و تداخل بازسازی می‌شود به گونه‌ای که در آن اثری از سیگنال مطلوب در زاویه موردنظر نباشد و محل صفرگذاری تداخل‌ها نیز تغییر پیدا نکند. برای بهبود بیشتر، از تلفیق بارگذاری قطری مبتنی بر فیلتر SMF در بازسازی ماتریس کواریانس استفاده می‌شود تا عملکرد راهکار پیشنهادی ارتقا یابد. شبیه‌سازی‌های انجام شده موید این است که روش پیشنهادی و روش بهبود یافته با بارگذاری قطری، کارایی خوبی در حذف سیگنال در زاویه ورود مطلوب داشته و در نتیجه جهت‌دهی الگوی پرتو در زاویه ورود سیگنال مطلوب و شکل الگوی پرتو در زوایای تداخلی اصلاح می‌شود.

### ۳) روش‌شناسی پژوهش

در این بخش، ابتدا مدل‌سازی سیگنال در مسئله شکل‌دهی پرتو بررسی می‌شود. سپس شکل‌دهنده‌های پرتو کمینه واریانس بررسی می‌شوند و در پایان روش پیشنهادی شکل‌دهی پرتو کمینه واریانس معرفی می‌شود.

### ۴) مدل‌سازی سیگنال

فرض می‌شود یک آرایه خطی با  $M$  عنصر همه‌سویه<sup>۲۲</sup> موجود است و سیگنال‌های دریافتی به صورت باند باریک و از نوع مختلط فرض می‌شوند. فاصله عناصر آرایه از یکدیگر  $d = \lambda / 2$  می‌باشد که  $\lambda$  طول موج سیگنال است. در حالت بهینه،

17. Spatial match filter

18. Capon

19. Convex optimization

20. Main-lobe

21. Side-lobe

22. Omnidirectional

فاصله عناصر از یکدیگر برای داشتن بیشینه پرتو دهی باید نصف طول موج باشد [۱]. با فرض اینکه تعداد  $K$  برداشت داده توسط  $M$  عنصر آرایه داشته باشیم، ماتریس داده‌های دریافتی  $X$  با ابعاد  $M \times K$  تشکیل می‌شود، بطوریکه

$$X = [\mathbf{x}(1), \mathbf{x}(2), \dots, \mathbf{x}(K)] \quad \text{رابطه (۱)}$$

که در آن  $\mathbf{x}(k)$  بردار سیگنال دریافتی توسط عناصر آرایه در  $k$  امین برداشت داده می‌باشد. اجزاء سیگنال دریافتی در  $k$  امین برداشت داده عبارتند از:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{x}_s(k) + \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{x}_n(k) \quad \text{رابطه (۲)}$$

که در آن  $\mathbf{x}_s(k)$ ،  $\mathbf{x}_i(k)$  و  $\mathbf{x}_n(k)$  به ترتیب نشانگر بردارهای سیگنال مطلوب، تداخل و نویز می‌باشند. در فرم ماتریسی داریم:

$$X = X_s + X_i + X_n \quad \text{رابطه (۳)}$$

که در آن  $X_s = [\mathbf{x}_s(1), \dots, \mathbf{x}_s(K)]$ ،  $X_i = [\mathbf{x}_i(1), \dots, \mathbf{x}_i(K)]$  و  $X_n = [\mathbf{x}_n(1), \dots, \mathbf{x}_n(K)]$  به ترتیب نشان‌دهنده ماتریس‌های سیگنال مطلوب، تداخل و نویز می‌باشند. در شرایط میدان دور<sup>۲۳</sup> بردار جاروب دریافتی سیگنال از زاویه  $\theta$  توسط آرایه عبارتست از:

$$\mathbf{a}(\theta) = [1, e^{-j2\pi d \sin(\theta)/\lambda}, \dots, e^{-j2\pi d \sin(\theta)(M-1)/\lambda}]^T \quad \text{رابطه (۴)}$$

همچنین با در نظر گرفتن یک منبع سیگنال مطلوب در میدان دور، بردار  $k$  ام سیگنال مطلوب از زاویه ورود مطلوب  $\theta_0$  برابر است با:

$$\mathbf{x}_s(k) = \mathbf{a}(\theta_0) s(k) \quad \text{رابطه (۵)}$$

که در آن  $s(k)$  سیگنال منبع مطلوب است. با فرض وجود  $L$  منبع تداخل، بردار  $k$  ام سیگنال تداخلی دریافتی برابر است با:

$$\mathbf{x}_i(k) = \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) s_l(k) \quad \text{رابطه (۶)}$$

که در آن  $\theta_l$  به ازای  $l=1, \dots, L$  زوایای ورود سیگنال‌های تداخل و  $s_l(k)$  سیگنال منابع تداخلی را نشان می‌دهد. بنابراین از رابطه (۲) داریم:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{a}(\theta_0) s(k) + \sum_{l=1}^L \mathbf{a}(\theta_l) s_l(k) + \mathbf{x}_n(k) \quad \text{رابطه (۷)}$$

خروجی شکل دهنده پرتو  $y(k)$  با رابطه (۸) حاصل می‌شود:

$$y(k) = \mathbf{w}^H \mathbf{x}(k) \quad \text{رابطه ۸}$$

که در آن  $\mathbf{w}$  بردار وزن‌های شکل‌دهنده پرتو و  $H$  علامت ترانهاده هرمتیتی است.

### ۵) بررسی شکل‌دهنده‌های پرتو مبتنی بر کمینه واریانس

در این بخش، مهمترین انواع شکل‌دهنده‌های پرتو مبتنی بر کمینه واریانس بررسی می‌شود و در بخش شبیه‌سازی، با روش‌های پیشنهادی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

### ۶) شکل‌دهنده کمینه واریانس بدون اعوجاج (MVDR)

وزن‌های بهینه در روش MVDR از حل مسئله بهینه‌سازی زیر حاصل می‌شود [۳]، [۴]:

$$\min_{\mathbf{w}} \mathbf{w}^H R_{i+n} \mathbf{w} \quad \text{به شرط} \quad \mathbf{w}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 1 \quad \text{رابطه ۹}$$

که در آن  $R_{i+n} = E \left\{ [\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{x}_n(k)] [\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{x}_n(k)]^H \right\}$  ماتریس کواریانس مجموع سیگنال‌های نویز و تداخل است. با حل مسئله بالا به روش ضرب‌کننده لاگرانژ، مقادیر وزن‌های مطلوب شکل‌دهنده پرتو به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{w}_{opt} = \frac{R_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) R_{i+n}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad \text{رابطه ۱۰}$$

در این حالت با داشتن اطلاعات ماتریس کواریانس  $R_{i+n}$ ، الگوریتم فوق، الگوریتم شکل‌دهنده MVDR ایده‌آل خواهد بود.

### ۷) شکل‌دهنده SMI

در روش MVDR چون ماتریس کواریانس تداخل و نویز  $R_{i+n}$  در عمل در دسترس نیست، از داده‌های ورودی که شامل سیگنال مطلوب، نویز و سیگنال‌های تداخل است، مطابق رابطه (۲) برای تخمین ماتریس کواریانس استفاده می‌شود. ماتریس کواریانس داده‌های ورودی،  $R_x$ ، با فرض ناهمبسته بودن سیگنال مطلوب و سیگنال‌های نویز و تداخل، به صورت زیر نمایش داده می‌شود [۲۱]:

$$R_x = E \{ \mathbf{x}(k) \mathbf{x}^H(k) \} = R_s + R_{i+n} \quad \text{رابطه ۱۱}$$

که در آن  $R_s$  ماتریس کواریانس سیگنال مطلوب است. با فرض اینکه فضای سیگنال ارگودیک در نظر گرفته شود، برای ماتریس  $R_x$ ، تخمین میانگین به صورت رابطه (۱۲) مورد استفاده قرار می‌گیرد [۸]، [۳۱]:

$$R_{SMI} = \frac{1}{K} (X X^H) \quad \text{رابطه ۱۲}$$

بر این اساس، در روش SMI مقادیر وزن بهینه با رابطه (۱۳) حاصل می‌شود:

$$\mathbf{w}_{SMI} = \frac{R_{SMI}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) R_{SMI}^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad \text{رابطه ۱۳}$$



همانطور که مشاهده می‌شود، وزن‌های حاصل با استفاده از معکوس ماتریس کواریانس تخمینی سیگنال دریافتی، یعنی  $R_{SMI}^{-1}$ ، محاسبه شده‌است. این ماتریس به دلیل وجود مولفه‌های سیگنال مطلوب در آن، وزن‌های بهینه برای تشکیل الگوی پرتو مناسب، در اختیار الگوریتم شکل دهنده پرتو قرار نمی‌دهد.

### ۸) شکل دهنده پرتو ESB

از جمله روش‌های شکل دهی پرتو است که جهت کاهش چالش موجود در الگوریتم SMI و جداسازی نسبی سیگنال مطلوب از سیگنال‌های نویز و تداخل ارائه شده‌است. در این روش، وزن‌های الگوریتم به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{w}_{ESB} = \mu \left( \sum_{i=1}^M \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \mathbf{a}(\theta_0) \quad \text{رابطه ۱۴}$$

که در آن  $\lambda_i$  برای  $i=1, 2, \dots, p, \dots, M$  مقادیر ویژه ماتریس کواریانس سیگنال ورودی را به ترتیب نزولی، از  $i=1$  تا  $i=M$  نشان می‌دهد. همچنین  $\mathbf{u}_i$  بردار ویژه متناظر با  $\lambda_i$  است. زیرفضای سیگنال به وسیله  $\mathbf{u}_1$  تا  $\mathbf{u}_p$  و زیر-فضای نویز توسط  $\mathbf{u}_{p+1}$  تا  $\mathbf{u}_M$  ساخته می‌شود [۲۶].

### ۹) شکل دهنده پرتو مبتنی بر تصویرسازی متعامد OP

این روش بهره قابل توجهی نسبت به الگوریتم ESB در شرایطی که تعداد برداشت‌های داده، محدود بوده و تخمین زیرفضای سیگنال با خطا همراه است، فراهم می‌کند. در این روش؛ همانند روش ESB مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس کواریانس سیگنال ورودی محاسبه می‌شوند اما برای به دست آوردن بردار وزن از رابطه (۱۵) استفاده می‌شود [۲۲]:

$$\mathbf{w}_{OP} = \mu \left( I - \sum_{i=1}^p \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^H \right) \mathbf{a}(\theta_0) \quad \text{رابطه ۱۵}$$

که در آن  $I$  ماتریس همانی با ابعاد  $M \times M$  است.

### ۱۰) الگوریتم SMI مبتنی بر بارگذاری قطری LSMI<sup>۲۴</sup>

الگوریتم LSMI نسبت به الگوریتم SMI در شرایطی که نمونه‌های داده‌ها کم باشد، دقت بالاتری فراهم می‌کند. در این روش مقادیر وزن‌ها با رابطه زیر حاصل می‌شود [۹]:

$$\mathbf{w}_{LSMI} = \frac{\left( R_{SMI} + \varepsilon I \right)^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \left( R_{SMI} + \varepsilon I \right)^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad \text{رابطه ۱۶}$$

که در آن  $\varepsilon$  یک مقدار مثبت و  $I$  ماتریس همانی است. افزودن پارامتر فوق به مقادیر قطری ماتریس کواریانس نویز و تداخل، سبب بهبود الگوی پرتو به جهت داشتن گلبرگ اصلی دقیق‌تر و گلبرگ‌های فرعی با عمق صفر<sup>۲۵</sup> بیشتر می‌گردد. برای یافتن

<sup>۲۴</sup> . Loaded SMI

<sup>۲۵</sup> . Null

مقدار بارگذاری می‌توان از فیلتر SMF استفاده کرد [۸]، [۳۰]. در این صورت مقدار بهینه  $\varepsilon$  به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{M} \left\| \frac{\mathbf{a}^H(\theta_0)}{\|\mathbf{a}(\theta_0)\|_2} X \right\|_2^2 \quad \text{رابطه (۱۷)}$$

در رابطه (۱۷)،  $\|\cdot\|_2$  علامت نرم دوم است.

### (۱۱) روش پیشنهادی شکل‌دهی پرتو

روش پیشنهادی در واقع بهبود یافته روش‌های SMI و LSMI است بطوریکه اثر سیگنال مطلوب تا حد امکان در سیگنال داده‌های دریافتی حذف شود و الگوی پرتو بهبود یابد. به این منظور به جای استفاده از  $R_{SMI}$  از تخمینی از  $R_{i+n}$  استفاده می‌کنیم. در ادامه نحوه تخمین  $R_{i+n}$  تشریح می‌شود.

فرض می‌شود زوایای ورود سیگنال‌های مطلوب و تداخل به درستی تخمین زده می‌شود. با توجه به این فرض برای تخمین  $R_{i+n}$  رویکردی متفاوت نسبت به روش‌های بررسی شده را پیش می‌گیریم. در این روش ابتدا با استفاده از الگوریتم گرام اشمیت [۳۲] بردار متعامد بر بردار جاروب سیگنال مطلوب را به دست می‌آوریم. اگر بردار متعامد به دست آمده در سیگنال ورودی ضرب شود، سیگنال حاصل از زاویه مطلوب حذف و ماتریس  $R_{SMI}$  به تخمینی از  $R_{i+n}$  تبدیل می‌شود. برای این منظور ابتدا زاویه ورود مطلوب فرضی را در نظر گرفته و بردار جاروب آن را به دست می‌آوریم سپس متعامد بردار جاروب سیگنال مطلوب را می‌یابیم. با توجه به اینکه حاصل ضرب داخلی دو بردار  $V_1$  و  $V_2$  برابر است با  $V_1^H V_2$ ، دو بردار مخالف صفر  $V_1$  و  $U_2$  را فرض می‌کنیم که با هم متعامد نیستند. هدف این است که با تفاضل مولفه برداری  $\alpha_1 V_1$  از بردار  $U_2$ ، آن را به بردار  $V_2$  تبدیل کنیم، به نحوی که بردارهای  $V_1$  و  $V_2$  متعامد باشند. بر این اساس مقدار  $\alpha_1$  به صورت زیر حاصل می‌شود [۳۲]:

$$\alpha_1 = \frac{\langle V_1, U_2 \rangle}{\langle V_1, V_1 \rangle} = \frac{\langle V_1, U_2 \rangle}{\|V_1\|^2} \quad \text{رابطه (۱۸)}$$

و در نتیجه بردار متعامد  $V_2$  به صورت زیر به دست می‌آید که بردار جاروب متعامد است:

$$V_2 = U_2 - \alpha_1 V_1 \quad \text{رابطه (۱۹)}$$

حال با ضرب کردن  $V_2$  در سیگنال دریافتی، سیگنال ورودی از زاویه مطلوب برابر صفر می‌شود. بنابراین جزء سیگنال مطلوب از ماتریس سیگنال ورودی  $X$  حذف شده و فقط سیگنال‌های تبدیل یافته نويز و تداخل باقی خواهد ماند.

حال به پیاده‌سازی روش فوق در کاربرد شکل‌دهی پرتو می‌پردازیم. برای حذف سیگنال مطلوب از ماتریس داده‌های ورودی  $X$  در رابطه (۳)، بردار عمود بر بردار جاروب مطلوب را که بردار  $\eta$  می‌نامیم، از روشی که بیان شد به دست می‌آوریم. با بهره‌گیری از خواص ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم داریم:

$$\boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{x}(k) = \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{a}(\theta_0) s(k) + \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{a}(\theta_l) s_l(k) + \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{x}_n(k) \quad \text{رابطه (۲۰)}$$

بنابراین با توجه به اینکه داریم،

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, \mathbf{a}(\theta_0) \rangle = \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{a}(\theta_0) = 0 \quad \text{رابطه (۲۱)}$$

سیگنال مطلوب در رابطه (۲۰) حذف شده و خواهیم داشت:

$$\tilde{\mathbf{x}}(k) = \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{x}(k) = \sum_{l=1}^L \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{a}(\theta_l) s_l(k) + \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{x}_n(k) \quad \text{رابطه (۲۲)}$$

بنابراین با اعمال رابطه فوق روی ماتریس شامل بردارهای ورودی، داریم:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{X} = \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{X}_i + \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{X}_n \quad \text{رابطه (۲۳)}$$

ضرب بردار  $\boldsymbol{\gamma}$  در ماتریس نویز ورودی  $\mathbf{X}_n$  تاثیر قابل توجهی روی فرآیند موردنظر که حذف سیگنال مطلوب است ندارد؛ فقط باعث تغییر در واریانس نویز می شود. چالشی که اکنون به وجود می آید اثر بردار ضرب شده در سیگنال های تداخل است. با رابطه (۲۳) اگرچه اثر خودصفرگذاری حل می شود اما نمی توان در زوایای تداخلی، صفر ایجاد کرد زیرا بردار  $\boldsymbol{\gamma}$  باعث جابه جایی محل تداخل ها شده و الگوی پرتو را تغییر می دهد. در واقع این عملیات می تواند گلبرگ اصلی را به زاویه مطلوب هدایت کند اما سیگنال تداخل روی گلبرگ های فرعی الگو قرار می گیرد. این موضوع نامطلوب است و می تواند تخصیص توان به گیرنده مطلوب را دچار مشکل کند. برای حل این مساله، بردار  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  را به صورتی تعریف می کنیم که

$$\langle \boldsymbol{\gamma}, \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \rangle = 1 \quad \text{رابطه (۲۴)}$$

به عبارت دیگر درایه های بردار  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  معکوس درایه های بردار  $\boldsymbol{\gamma}$  خواهد بود. با ضرب بردار  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}}$  در طرفین رابطه (۲۳) داریم:

$$\hat{\mathbf{X}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \tilde{\mathbf{x}} = \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{X}_i + \tilde{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}^H \mathbf{X}_n \approx \mathbf{X}_i + \mathbf{X}_n \quad \text{رابطه (۲۵)}$$

به این ترتیب، اثر مقادیر درایه های بردار متعامد  $\boldsymbol{\gamma}$  در ماتریس مشاهدات  $\hat{\mathbf{X}}$  حذف می شود و  $\hat{\mathbf{X}}$  ماتریس تخمینی داده های نویز به علاوه تداخل است. رابطه (۲۵) با فرض اینکه  $\tilde{\boldsymbol{\gamma}} \boldsymbol{\gamma}^H \approx \mathbf{I}$ ، تقریب زده شده است. بنابراین ماتریس کواریانس نویز به علاوه تداخل به صورت رابطه (۲۶) تقریب زده می شود که تخمینی از ماتریس کواریانس  $\mathbf{R}_{i+n}$  است:

$$\hat{\mathbf{R}}_x = \frac{1}{K} (\hat{\mathbf{X}} \hat{\mathbf{X}}^H) \quad \text{رابطه (۲۶)}$$

بنابراین در الگوریتم پیشنهادی برای وزندهی از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$\hat{\boldsymbol{w}} = \frac{\hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)}{\mathbf{a}^H(\theta_0) \hat{\mathbf{R}}_x^{-1} \mathbf{a}(\theta_0)} \quad \text{رابطه (۲۷)}$$

الگوریتم پیشنهادی حاصل شده را الگوریتم CMRBF<sup>۲۶</sup> می‌نامیم. از رابطه (۲۷) ملاحظه می‌شود محاسبه وزن‌ها مشابه با روش شکل‌دهی پرتو کمینه واریانس که در رابطه (۱۰) تشریح شد، صورت می‌گیرد. همچنین تخمین ماتریس کواریانس در رابطه (۲۶) مشابه با روش الگوریتم SMI در رابطه (۱۲) حاصل می‌شود. نوآوری اصلی الگوریتم پیشنهادی CMRBF مطابق با رابطه (۲۵) در تبدیل ماتریس داده‌های ورودی است بصورتیکه مولفه‌های سیگنال مطلوب حداقل امکان حذف شده و تخمین مناسبی از ماتریس کواریانس نویز به‌علاوه تداخل حاصل شود. بنابراین در الگوی پرتو حاصل شده، از صفر گذاری در زاویه مطلوب اجتناب شده و در نتیجه سیگنال در زاویه ورود مطلوب دچار تضعیف نخواهد شد. در ادامه برای مقاوم‌سازی الگوریتم در مقابل تعداد کم برداشت داده و خطاهای کوچک ورودی که روی محاسبه ماتریس کواریانس تاثیر می‌گذارد، از تکنیک بار گذاری قطری بهره‌گیری می‌کنیم. در اینجا جهت یافتن مقدار بهینه  $\varepsilon$  از نرمالیزه کردن بردار جاروب مطلوب، مشابه روش SMF بهره می‌بریم. در نهایت مقدار وزن‌های بهینه در الگوریتم پیشنهادی مبتنی بر بار گذاری قطری، به اختصار، DL-CMRBF<sup>۲۷</sup> با رابطه (۲۸) حاصل می‌شود:

$$\hat{w}_{DL} = \frac{(\hat{R}_x + \varepsilon I)^{-1} a(\theta_0)}{a^H(\theta_0)(\hat{R}_x + \varepsilon I)^{-1} a(\theta_0)} \quad \text{رابطه (۲۸)}$$

بنابراین با ضرب بردار وزن در بردار سیگنال ورودی آرایه مطابق رابطه (۸)، خروجی شکل‌دهنده پرتو به دست می‌آید. جدول ۱ شبه کد الگوریتم پیشنهادی را نشان می‌دهد. در این جدول، مفروضات مورداستفاده و مراحل اجرای الگوریتم پیشنهادی به همراه روابط ریاضی مورداستفاده در هر مرحله به اختصار بیان شده‌است. مطابق جدول، تفاوت الگوریتم پیشنهادی در مقایسه با سایر الگوریتم‌های مورد مطالعه مبتنی بر کمینه واریانس، در محاسبه بردار متعامد با بردار جاروب سیگنال مطلوب در مرحله ۳ و تخمین ماتریس داده‌های نویز و تداخل در مراحل ۴ و ۵ با کمک ضرب داخلی بردار متعامد در ماتریس داده‌های دریافتی برای حذف مولفه سیگنال مطلوب است.

### جدول ۱. مراحل الگوریتم پیشنهادی شکل‌دهی پرتو

| مفروضات  |
|--|
| آرایه دارای $M$ عنصر   |
| تعداد برداشت داده: $K$   |
| داشتن تخمینی از زوایای ورود سیگنال‌های مطلوب و تداخل                                       |
| مراحل اجرای الگوریتم   |
| مرحله ۱: تشکیل ماتریس داده‌های دریافتی (رابطه (۱))   |
| مرحله ۲: محاسبه بردار جاروب سیگنال مطلوب با استفاده از تخمین زاویه ورود مطلوب (رابطه (۴))  |
| مرحله ۳: محاسبه بردار متعامد با الگوریتم گرام اشمیت (روابط (۱۸) و (۱۹))                    |
| مرحله ۴: ضرب داخلی بردار متعامد در ماتریس داده‌ها برای حذف مولفه سیگنال مطلوب (رابطه (۲۳)) |
| مرحله ۵: تخمین ماتریس داده‌های نویز و تداخل (رابطه (۲۵))                                   |

<sup>26</sup> . Covariance matrix reconstructed beamforming

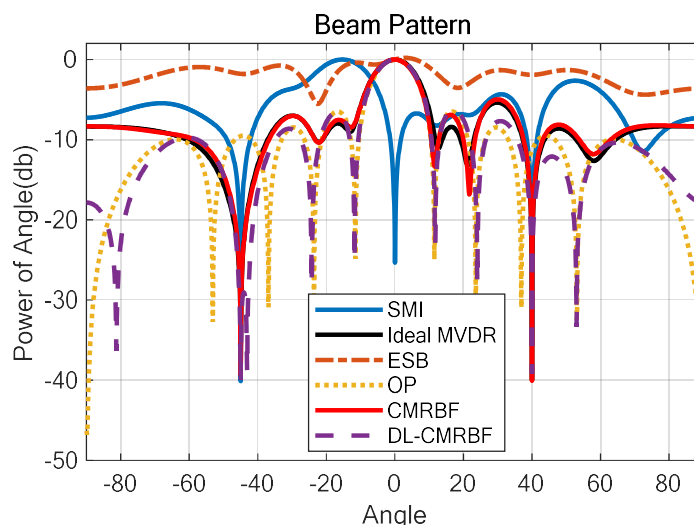
<sup>27</sup> . Diagonal loading CMRBF

|  |
|--|
| مرحله ۶: تخمین ماتریس کواریانس نویز و تداخل (رابطه (۲۶))                     |
| مرحله ۷: اعمال تکنیک بارگذاری قطری (رابطه (۱۷)) (صرفاً در الگوریتم DL-CMRBF) |
| مرحله ۸: محاسبه وزن‌های بهینه (رابطه (۲۸))                                   |
| مرحله ۹: محاسبه خروجی شکل‌دهنده پرتو (رابطه (۸))                             |

## ۱۲ یافته‌های پژوهش

در شبیه‌سازی فرض می‌شود آرایه خطی با تعداد ۱۰ عنصر همه‌سویه موجود است. زاویه ورود سیگنال مطلوب صفر درجه و زوایای ورود سیگنال‌های تداخلی نیز در  $-45$  و  $40$  درجه قرار دارند. ماتریس داده ورودی شامل ۳ زاویه ورود است. هدف؛ هدایت الگوی پرتو به سمت زاویه ورود سیگنال مطلوب است. از طرفی برای دو زاویه دیگر نیز باید صفرگذاری صورت بگیرد. در اینجا عملکرد روش‌های پیشنهادی را با روش‌های SMI، ESB و OP مقایسه می‌کنیم. علاوه بر این، روش ایده‌آل MVDR را بر اساس دریافت سیگنال تداخل و نویز عاری از سیگنال مطلوب، در شبیه‌سازی آورده‌ایم. این روش الگوی پرتو ایده‌آل، جهت مقایسه با روش‌های دیگر بر اساس تشخیص صحیح سیگنال‌های تداخل و قرار دادن صفر در این زوایا و هدایت گلبرگ اصلی به زاویه مطلوب ایجاد می‌کند.

شکل ۱ الگوی پرتو روش‌های مورد بررسی را باهم مقایسه می‌کند. مقدار  $\epsilon$  در شبیه‌سازی روش DL-CMRBF مطابق رابطه (۱۷) برابر  $141/55$  است. در این شکل، اثر ورود سیگنال مطلوب را به ماتریس کواریانس با الگوی پرتو SMI مشاهده می‌کنیم. بر اساس فرضیات، گلبرگ اصلی الگو باید به سمت زاویه صفر درجه هدایت شود اما الگوی پرتو روش SMI این زاویه را به اشتباه زاویه سیگنال تداخلی در نظر گرفته و صفرگذاری صورت گرفته است. در الگوی پرتو الگوریتم ESB مشاهده می‌کنیم که دقت کافی برای هدایت دقیق گلبرگ‌ها ندارد و فقط توانسته زاویه گلبرگ اصلی را از حالت خودصفرگذاری خارج کند. در مورد الگوریتم OP نیز می‌بینیم که هیچکدام از زوایای تداخل را نتوانسته حذف کند و فقط قادر بوده زاویه گلبرگ اصلی را یافته و الگوی پرتو را به آن سمت هدایت کند.



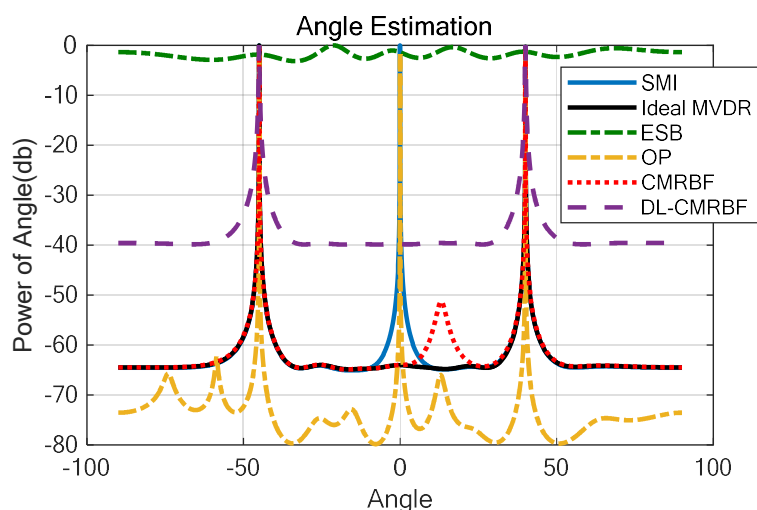
شکل ۱. الگوی پرتو حاصل از شکل‌دهی پرتو و مقایسه الگوریتم‌های به کار گرفته شده در مقایسه با روش پیشنهادی

طبق شکل (۱) روش‌های پیشنهادی CMRBF و DL-CMRBF الگوهای پرتو مناسبی را به وجود آورده و به معیارهای شکل‌دهی پرتو در چالش موردنظر دست یافته‌است. همچنین تفاوت الگوی پرتو در دو حالت با افزودن مقدار بارگذاری قطری و بدون آن را می‌توان مشاهده کرد: دامنه گلبرگ‌های فرعی در روش DL-CMRBF بطور کلی کمتر شده‌است و صفرها عمق بیشتری دارد و هر دو روش پیشنهادی توانسته‌اند هم گلبرگ اصلی در زاویه صفر ایجاد کرده و هم در زوایای تداخلی صفر ایجاد کنند.

در شکل (۲) کارایی الگوریتم‌های شکل‌دهی پرتو در حذف سیگنال مطلوب و تخمین زاویه تداخل نشان داده شده‌است. معیار مورد بررسی، میزان توان دریافتی بر حسب زاویه ورود، به صورت رابطه (۲۹) است:

$$P(\theta) = \frac{1}{\mathbf{a}^H(\theta) \mathbf{R}^{-1} \mathbf{a}(\theta)} \quad \text{رابطه (۲۹)}$$

که در آن  $R$  ماتریس کواریانس تخمینی نویز و تداخل در هر الگوریتم مورد بررسی می‌باشد. مطابق شکل ملاحظه می‌شود در الگوریتم SMI و OP در زاویه صفر درجه پیک توانی وجود دارد که نتیجه تخمین نادرست است. بنابراین الگوی توان SMI و OP سیگنال ورودی از زاویه صفر درجه را وارد ماتریس کواریانس داده‌های نویز و تداخل می‌کند. در مورد استفاده از روش ESB همانگونه که بیان شد، این الگوریتم قابلیت حذف تداخل ندارد و فقط با محدود کردن الگو سطح گلبرگ اصلی را بالا می‌آورد. مشاهده می‌کنیم اعمال روش پیشنهادی CMRBF سبب می‌شود سیگنال مطلوب با دقت بالایی از ماتریس داده دریافتی حذف شده و اثر اندکی از آن باقی بماند. در الگوریتم DL-CMRBF با افزودن مقدار بارگذاری قطری، اثر سیگنال مطلوب روی ماتریس کواریانس تخمینی کاهش یافته‌است و تنها پیک‌های موجود، پیک‌های مربوط به زوایای تداخل هستند.

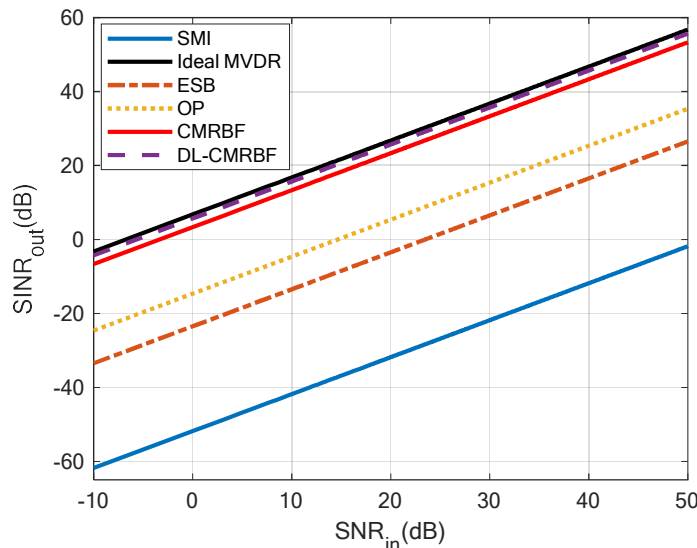


شکل ۲. تخمین زوایای ورود تداخل در الگوریتم‌های متفاوت و مقایسه کارایی روش‌های پیشنهادی در حذف سیگنال مطلوب

جهت مقایسه کمی بهبود سیگنال خروجی به ازای نسبت‌های مختلف SNR ورودی، از معیار نسبت توان سیگنال مطلوب به توان نویز به علاوه تداخل (SINR)<sup>۲۸</sup> مطابق رابطه (۳۰) استفاده می‌کنیم [۳۱]:

$$\text{SINR} = \frac{\sigma_s^2 |\mathbf{w}^H \mathbf{a}|^2}{\mathbf{w}^H \mathbf{R}_{i+n} \mathbf{w}} \quad \text{رابطه (۳۰)}$$

که در آن  $\sigma_s^2$  توان سیگنال مطلوب است. برای این منظور نسبت SNR ورودی را از ۱۰- تا ۵۰ دسی‌بل افزایش می‌دهیم و اثر آن را بر خروجی بررسی می‌کنیم. نویز ورودی یک نویز گوسی سفید (WGN)<sup>۲۹</sup> و تعداد برداشت‌ها برابر با ۱۰۰ در نظر گرفته می‌شود. شکل (۳) نسبت SINR خروجی را بر حسب SNR ورودی نشان می‌دهد.



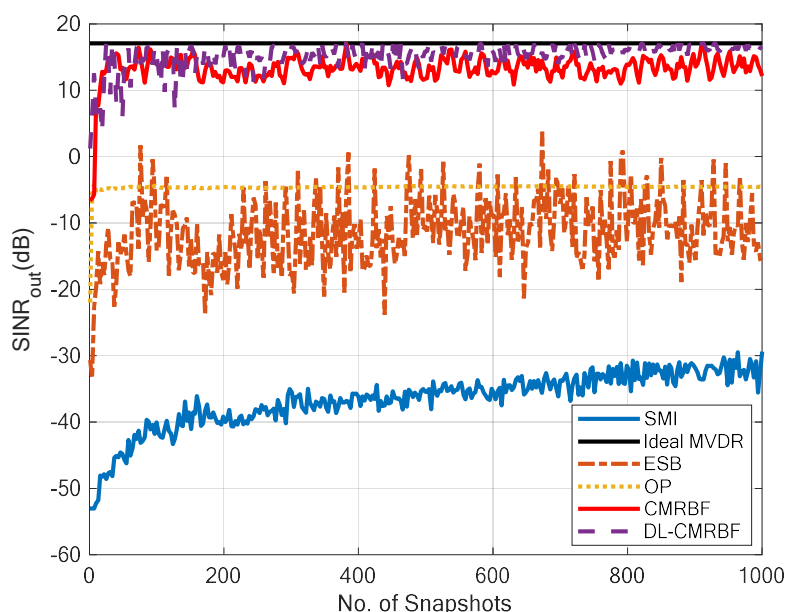
شکل ۳. نسبت SINR خروجی بر حسب SNR ورودی

مشاهده می‌شود با افزایش SNR ورودی، مقدار SINR برای تمام الگوریتم‌ها افزایش می‌یابد. همچنین معیار SINR روش‌های پیشنهادی با فاصله کمی از روش MVDR ایده‌آل قرار گرفته‌است و نسبت به سایر الگوریتم‌ها مقدار بالاتری دارد. همچنین تاثیر بارگذاری قطری در مقدار SINR خروجی در روش پیشنهادی بهبود نزدیک به ۳ دسی‌بل ایجاد می‌کند. در ادامه، تاثیر تعداد برداشت را بر خروجی SINR مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این شبیه‌سازی، مقدار SNR را برای تمام الگوریتم‌ها برابر ۱۰ دسی‌بل در نظر گرفتیم و تعداد برداشت‌ها را از ۱ تا ۱۰۰۰ افزایش می‌دهیم. شکل (۴) مقدار SINR خروجی را بر حسب تعداد برداشت نشان می‌دهد. مطابق شکل مشاهده می‌شود روش SMI و ESB نسبت به تعداد برداشت، تغییرات قابل توجهی در SINR خروجی نشان می‌دهد و با افزایش تعداد برداشت، به تدریج به مقدار اضافه می‌شود. SINR در روش OP پس از تعداد کمی برداشت به مقدار تقریباً ثابتی می‌رسد و با افزایش تعداد برداشت، مقدار آن تغییری نمی‌کند. در روش پیشنهادی CMRBF مقدار SINR پس از برداشت‌های اولیه، حول مقدار ثابتی تغییر می‌کند در حالیکه در روش DL-CMRBF مقدار SINR به تدریج افزایش می‌یابد و به مقدار ایده‌آل بسیار نزدیک می‌شود. مشاهده

<sup>28</sup>. Signal-to-interference-plus-noise ratio

<sup>29</sup>. White Gaussian noise

می‌شود که مقدار متوسط SINR در روش‌های SMI، ESB، OP، CMRBF و DL-CMRBF با تعداد برداشت‌های کافی به ترتیب به حدود -32 dB، -10 dB، -5 dB، 13 dB و 17 dB می‌رسد که برتری روش DL-CMRBF را نسبت به سایر روش‌ها نشان می‌دهد. همچنین حداقل میزان بهبود SINR در روش‌های پیشنهادی CMRBF و DL-CMRBF پس از ۱۰۰ برداشت برابر با 18 dB در مقایسه با سایر روش‌ها می‌باشد.



شکل ۴. خروجی SINR بر حسب تعداد برداشت

جدول ۲ تعداد عملیات جمع و ضرب لازم برای محاسبه وزن‌ها در الگوریتم پیشنهادی را با الگوریتم‌های دیگر مقایسه می‌کند. در جدول، تعداد عملیات لازم برای محاسبه معکوس ماتریس و همچنین محاسبات مقادیر و بردارهای ویژه لحاظ نشده‌است. لازم به ذکر است که حجم محاسبات معکوس ماتریس و همچنین حجم محاسبات مقادیر و بردارهای ویژه به روش متعارف از مرتبه  $O(M^3)$  است [۳۳].

جدول ۲. حجم محاسبات الگوریتم‌های شکل‌دهی پرتو

| الگوریتم شکل‌دهی پرتو | روابط محاسبه وزن            | تعداد عملیات ضرب                | تعداد عملیات جمع                |
|-----------------------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|
| Ideal MVDR            | (۱۰)                        | $M^2 + M + 1$                   | $M^2 - 1$                       |
| SMI                   | (۱۲) و (۱۳)                 | $M^2 + M(K^2 + 1) + 1$          | $M^2 + MK(K-1) - 1$             |
| ESB                   | (۱۴)                        | $M^3 + M^2(p+1) + M + 1$        | $M^2 + p$                       |
| OP                    | (۱۵)                        | $M^2(p+1) + M$                  | $M^2 + p$                       |
| CMRBF                 | (۲۴) تا (۲۷)                | $M^2(K+1) + M(K^2 - K + 7) - 3$ | $M^2(K+2) + M(K^2 - K + 5) + 1$ |
| DL-CMRBF              | (۱۷) تا (۱۹) و (۲۴) تا (۲۷) | $M^2(K+1) + M(K^2 + 9) + K - 2$ | $M^2(K+2) + M(K^2 + 6) - 1$     |



### ۱۳) نتیجه گیری و پیشنهادها

در این مقاله جهت بهبود الگوریتم شکل دهی پرتو مبتنی بر کمینه واریانس، از بازسازی ماتریس کواریانس نوین و تداخل با استفاده از بردار متعامد بر بردار جاروب سیگنال مطلوب که از الگوریتم گرام اشمیت به دست آمده است، به همراه بارگذاری قطری استفاده شد. نتایج شبیه سازی نشان دهنده بهبود الگوی پرتو و محل گلبرگ اصلی و صفر گذاری در زوایای تداخل و همچنین بهبود نسبت توان سیگنال خروجی شکل دهنده به توان نوین و تداخل در مقایسه با روش های همتا می باشد. در ارزیابی الگوریتم پیشنهادی در یک شبیه سازی نوعی، در شرایط SNR ورودی برابر با ۱۰ دسی بل و تعداد ۱۰۰ برداشت، بهبود حداقل ۱۸ دسی بل در سطح SINR خروجی در مقایسه با الگوریتم های همتا به دست آمد.

### منابع

- Abualhayja'a, M. & Hussein, M. (2021). Comparative study of adaptive beamforming algorithms for smart antenna applications. International Conference on Communications, Signal Processing, and their Applications (ICCSA), 1-5. <https://doi.org/10.1016/j.trb.2017.04.003>
- Ai, X. & Gan, L. (2019). Robust adaptive beamforming with subspace projection and covariance matrix reconstruction. IEEE Access, 7: 102149-102159. <https://doi.org/1097/j.trb.2023.35.15>
- Cox, H. & Zeskind, R. & Owen, M. (1987). Robust adaptive beamforming. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 35 (10): 1365-1376. <https://doi.org/1083/j.trb.2018.16.79>
- Ge, Q. & Zhang, Y. & Wang, Y. & Zhang, D. (2020). Multi-constraint adaptive beamforming in the presence of the desired signal. IEEE Communications Letters, 24 (11): 2594-2598. <https://doi.org/1082/j.trb.2020.10.44>
- Huang, Y. & Zhou, M. & Vorobyov, S. A. (2019). New designs on MVDR robust adaptive beamforming based on optimal steering vector estimation. IEEE Transactions on Signal Processing, 14 (67): 3624-3638. <https://doi.org/1080/j.trb.2019.32.111>
- Igambi, D. & Yang, X. & Jalal, B. (2018). Robust adaptive beamforming based on desired signal power reduction and output power of spatial matched filter. IEEE Access, 6: 50217-50228. <https://doi.org/1031/j.trb.2018.24.100>
- Jiang, B. (2008). Low-complexity implementation for worst-case optimization-based robust adaptive beamforming. 5th IEEE Sensor Array and Multichannel Signal Processing Workshop, Darmstadt. <https://doi.org/1035/j.trb.2003.4.137>
- Jalal, B. & Yang, X. & Liu, Q. & Long, T. & Sarkar, T. K. (2020). Fast and robust variable step-size LMS algorithm for adaptive beamforming. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, 19 (7): 1206-1210. <https://doi.org/1060/j.trb.2009.27.68>
- Ke, Y. & Zheng, C. & Peng, R. & Li, X. (2017). Robust adaptive beamforming using noise reduction preprocessing-based fully automatic diagonal loading and steering vector estimation. IEEE Access, 5 (1): 12974-12987. <https://doi.org/1037/j.trb.2009.27.88>
- Khabbazibasmenj, A. & Vorobyov, S. A. & Hassanien, A. (2012). Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation with as little as possible prior information. IEEE Transactions on Signal Processing, 60 (6): 2974-2987. <https://doi.org/1049/j.trb.2014.13.69>
- Kim, S. & Magnani, A. & Mutapcic, A. & Boyd, S. P. & Luo, Z. (2008). Robust beamforming via worst-case SINR maximization. IEEE Transactions on Signal Processing, 56 (4): 1539-1547. <https://doi.org/1048/j.trb.2020.20.30>
- Li, B. & Rong, Y. & Sun, J. & Teo, K. L. (2018). A distributionally robust minimum variance beamformer design. IEEE Signal Processing Letters, 25 (12): 105-109. <https://doi.org/1074/j.trb.2014.15.85>
- Liu, J. & Orlando, D. & Addabbo, P. & Liu, W. (2019). SINR distribution for the persymmetric SMI beamformer with steering vector mismatches. IEEE Transactions on Signal Processing, 67 (5): 1382-1392. <https://doi.org/1017/j.trb.2004.21.10>
- Liu, Z. & Zhao, S. & Zhang, G. & Jiao, B. (2019). Robust adaptive beamforming for sidelobe canceller with null widening. IEEE Sensors Journal, 19 (23): 11213-11220. <https://doi.org/1096/j.trb.2011.18.122>
- Manai, H. & Slama, L. B.H. & Bouallegue, R. (2019). Interference management by adaptive beamforming algorithm in massive MIMO networks. 15th International Wireless Communications & Mobile Computing Conference (IWCMC), Tangier, Morocco, June 24-28. <https://doi.org/1089/j.trb.2023.25.45>
- Mohammadzadeh, S. & Nascimento, V. H. & Lamare, R. C. & Kukrer, O. (2020). Maximum entropy-based interference-plus-noise covariance matrix reconstruction for robust adaptive beamforming. IEEE Signal Processing Letters, 27: 845-849. <https://doi.org/1073/j.trb.2005.18.101>
- Proakis, J. G. & Salehi, M. (2007). Digital communications, Boston, McGraw-Hill Education: 5th edition. <https://doi.org/1056/j.trb.2007.25.98>
- Shen, F. & Chen, F. & Song, J. (2015). Robust adaptive beamforming based on steering vector estimation and covariance matrix reconstruction. IEEE Communications Letters, 19 (9): 1636-1639. <https://doi.org/1038/j.trb.2009.24.53>

- Shi, Y. & Huang, L. & Qian, C. & So, H. C. (2015). Shrinkage linear and widely linear complex-valued least mean squares algorithms for adaptive beamforming. *IEEE Trans. Signal Process.*, 63 (1): 119-131. <https://doi.org/1097/j.trb.2014.26.57>
- Somasundaram, D., (2012). Linearly constrained robust Capon beamforming. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60 (11): 5845-5856. <https://doi.org/1046/j.trb.2009.31.105>
- Stoica, P. & Wang, Z. & Li, J. (2003). Robust capon beamforming. *IEEE Signal Processing Letters*, 10 (6): 172-175. <https://doi.org/1024/j.trb.2017.13.41>
- Veen, B. D. V. & Buckley, K. M. (1988). Beamforming: a versatile approach to spatial filtering. *IEEE Acoustics, Speech, and Signal Processing Magazine*, 5 (2): 4-24. <https://doi.org/1062/j.trb.2011.13.85>
- Watkins, D. S. (2008). *Fundamentals of Matrix Computations*. Wiley-Interscience, Pure and applied mathematics, 2ND edition. <https://doi.org/1046/j.trb.2020.38.135>
- Yazdi, N. & Todros, K. (2020). Measure-transformed MVDR beamforming. *IEEE Signal Processing Letters*, 27: 1959-1963. <https://doi.org/1080/j.trb.2023.33.64>
- Yan, L. & Yang, X. & Xi, W. & Zhang, Z. & Sarkar, T. K. (2014). Robust adaptive beamforming based on interference covariance matrix reconstruction and mismatched steering vector compensation. *Proceedings of 2014 3rd Asia-Pacific Conference on Antennas and Propagation*, Harbin. <https://doi.org/1044/j.trb.2006.26.132>
- Yang, X. & Li, S. & Liu, Q. & Long, T. & Sarkar, T. K. (2020). Robust wideband adaptive beamforming based on focusing transformation and steering vector compensation. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 19 (12): 2280-2284. <https://doi.org/1087/j.trb.2010.30.20>
- Yang, X. & Li, Y. & Liu, F. & Lan, T. & Long, T. & Sarkar, T. K. (2021). Robust adaptive beamforming based on covariance matrix reconstruction with annular uncertainty set and vector space projection. *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, 20 (2): 130-134. <https://doi.org/1091/j.trb.2015.34.73>
- Yang, L. & Yang, Y. & Yang, J. (2019). Robust adaptive beamforming for uniform linear arrays with sensor gain and phase uncertainties. *IEEE Access*, 7 (12): 2677-2685. <https://doi.org/1019/j.trb.2011.6.75>
- Zhang, Z. & Liu, W. & Leng, W. & Wang, A. & Shi, H. (2016). Interference-plus-noise covariance matrix reconstruction via spatial power spectrum sampling for robust adaptive beamforming. *IEEE Signal Processing Letters*, 23 (1): 121-125. <https://doi.org/1067/j.trb.2005.21.22>
- Zheng, Z. & Zheng, Y. & Wang, W. & Zhang, H. (2018). Covariance matrix reconstruction with interference steering vector and power estimation for robust adaptive beamforming. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 67 (9): 8495-8503. <https://doi.org/1044/j.trb.2022.17.120>
- Zheng, Z. & Yang, T. & Wang, W. & So, H. C. (2019). Robust adaptive beamforming via simplified interference power estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 55 (6): 3139-3152. <https://doi.org/1090/j.trb.2017.9.107>
- Zhu, X. & Ye, Z. & Xu, X. & Zheng, R. (2019). Covariance matrix reconstruction via residual noise elimination and interference powers estimation for robust adaptive beamforming. *IEEE Access*, 7: 53262 - 53272. <https://doi.org/1076/j.trb.2005.12.22>
- Zhu, X. & Xu, X. & Ye, Z. (2020). Robust adaptive beamforming via subspace for interference covariance matrix reconstruction. *Signal Processing*, 167: 1-10. <https://doi.org/1088/j.trb.2021.18.46>